

# Raspon deformacija u uspravnoj ekvidistantnoj konusnoj projekciji

**Martina TRIPLAT HORVAT, Željka TUTEK, Miljenko LAPAINE**  
– Zagreb<sup>1</sup>

*SAŽETAK.* U radu proučavamo raspon deformacija u smjeru sjever-jug za uspravnu konusnu projekciju koja je ekvidistantna uzduž meridijana. Prvi dio rada opisuje postupak računanja parametara projekcije na temelju zadanih geografskih širina dviju standardnih paralela što se nalaze unutar područja preslikavanja i koji je uobičajen u poznatoj, do sada objavljenoj literaturi. Drugi dio rada proučava raspodjelu deformacija uz zadani uvjet da na sjevernom i južnom dijelu područja koje se prikazuje deformacije budu simetrične. Postavili smo uvjet da su linearna mjerila na rubu područja (uzduž južne i sjeverne paralele) međusobno jednaka. Zadnji dio rada proučava utjecaje širine i položaja područja preslikavanja u smjeru sjever-jug, u konusnim projekcijama ekvidistantnima uzduž meridijana, na raspon deformacija određujući vrijednosti nepoznate konstante proporcionalnosti (parametar  $n$ ). U prvom dijelu tog istraživanja konstanta proporcionalnosti je bilo koji realni broj iz intervala  $(0, 1)$ . U drugom dijelu istraživanja, da bismo odredili vrijednost parametra  $n$  iz tog intervala, postavili smo dodatni uvjet prema kojem bi linearne deformacije na rubnim paralelama bile po apsolutnoj vrijednosti jednake linearnim deformacijama u srednjem dijelu. Time smo odredili i relaciju koja omogućuje određivanje minimalne i maksimalne vrijednosti raspona linearnog mjerila uzduž paralele za konusne projekcije koje su ekvidistantne uzduž meridijana.

*Ključne riječi:* kartografske projekcije, ekvidistantna konusna projekcija, raspon deformacija.

## 1. Uvod

Na temelju dostupne literature možemo reći da je o utjecaju i raspodjeli deformacija uzrokovanih preslikavanjem zakrivljene Zemljine površine u ravninu projekcije napisan velik broj radova koji se bave proučavanjem kartografskih projekcija,

<sup>1</sup> dr. sc. Martina Triplat Horvat, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: mthorvat@geof.hr,

mr. sc. Željka Tutek, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: zeljkat@geof.hr,

prof. dr. sc. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: mlapaine@geof.hr.

npr. Hinks (1912), Young (1920), Adams (1927), Deetz i Adams (1934), Maling (1973), Snyder (1978), Skopeliti i Tsoulos (2013).

Hinks (1912) u svojoj knjizi o kartografskim projekcijama među ostalim daje formule za računanje ekvidistantnih konusnih projekcija s jednom i dvije standardne paralele. Proučavajući konusnu projekciju s jednom standardnom paralelom daje vrijednosti linearnog mjerila uzduž paralele za područje preslikavanja od  $0^\circ$  do  $80^\circ\text{N}$  geografske širine za tri proizvoljno odabrane standardne paralele. Također obrazlaže pet različitih uvjeta za odabir dvije standardne paralele, a računski postupak primjenjuje na području južne Afrike između  $15^\circ\text{S}$  i  $35^\circ\text{S}$  geografske širine.

Maling (1973) u svojoj knjizi izlaže teoriju kartografskih projekcija gdje među ostalim daje jednadžbe za ekvidistantne konusne projekcije s jednom standardnom (Ptolemejeva) i dvije standardne (de l'Isleova) paralele te tablicu u kojoj za te projekcije prikazuje vrijednosti linearnih mjerila za područje od  $0^\circ$  do  $90^\circ\text{N}$  geografske širine.

Snyder (1978) u svom radu proučava razne vrste ekvidistantnih konusnih projekcija. U radu prikazuje promjene vrijednosti linearnog mjerila uzduž paralela za osam vrsta konusnih ekvidistantnih projekcija za područje SAD-a, odnosno za područje od  $25^\circ\text{N}$  do  $50^\circ\text{N}$  geografske širine. Također, tablično prikazuje linearna mjerila uzduž paralela i meridijana te mjerila površina za konformne, ekvidistantne i ekvivalentne konusne projekcije.

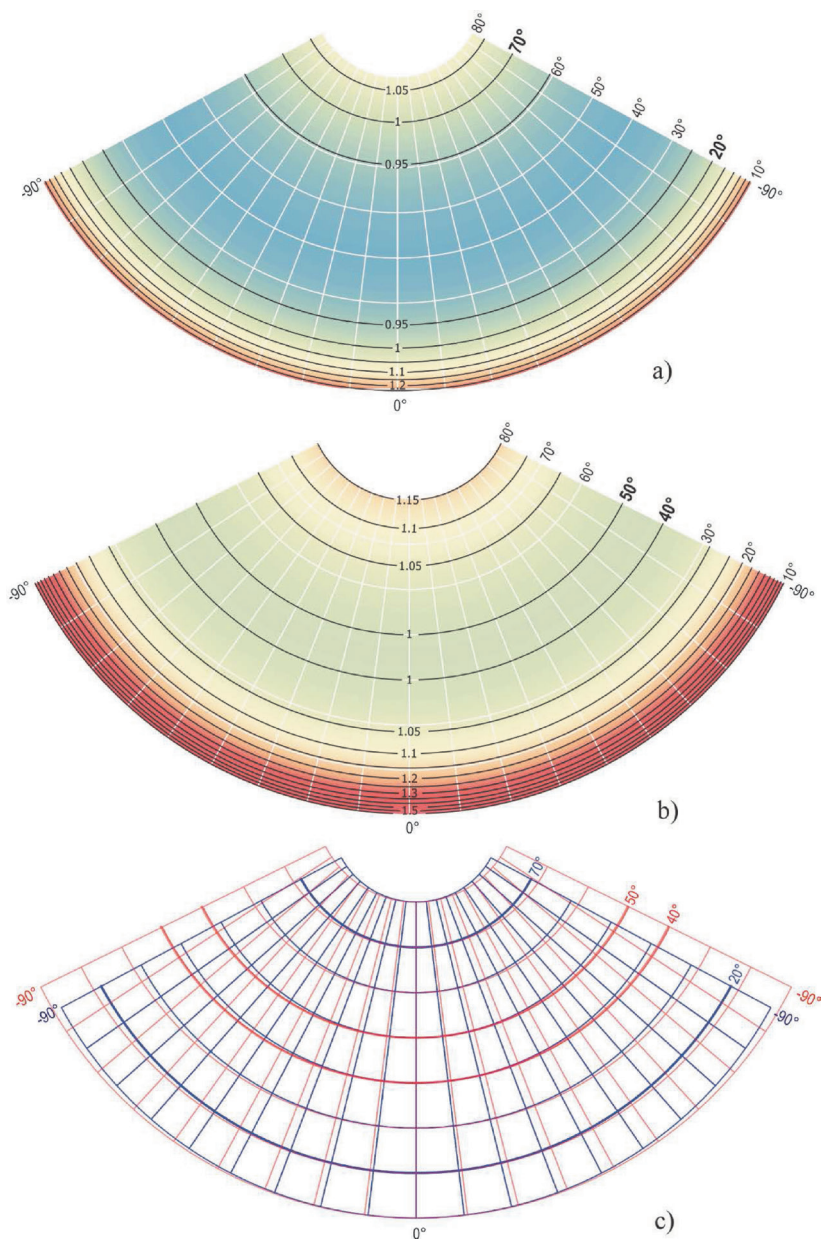
Skopeliti i Tsoulos (2013) proučavaju prikladnu projekciju za navigaciju u arktičkom području te daju analitički pristup odabiru prikladne projekcije proučavajući deformacije različitih vrsta kartografskih projekcija. Tako i za ekvidistantnu konusnu projekciju prema Kavrayskom procjenjuju deformacije na temelju Tissotove elipse pogreška, izolinija deformacija kutova i površina, grafova mjerila površina te linearnih mjerila uzduž meridijana i paralela. Vrijednosti mjerila također prikazuju tablično.

Za razliku od Hinksa (1912), Malinga (1973), Snydera (1978) te Skopelitia i Tsoulosa (2013), koji u svojim radovima među ostalim obrađuju ekvidistantne konusne projekcije, Young (1920), Adams (1927) te Deetz i Adams (1934) u svojim radovima ne spominju ekvidistantne projekcije već uglavnom proučavaju utjecaj i raspodjelu deformacija u ekvivalentnim i konformnim konusnim projekcijama.

S obzirom na to da se zakrivljena Zemljina površina ne može preslikati u ravninu projekcije bez deformacija, odlučili smo istražiti koliki je utjecaj širine područja preslikavanja na raspon deformacija ako je karta izrađena u konusnoj projekciji koja je ekvidistantna uzduž meridijana.

Za uspravnu konusnu projekciju ekvidistantnu uzduž meridijana linearno mjerilo je jednako 1 samo uzduž meridijana i standardnih paralela ako takve postoje. O izboru standardnih paralela ovise linearne deformacije nastale preslikavanjem. Utjecaj linearnih deformacija pri različitom odabiru standardnih paralela lako je uočljiv na slici 1.

Na slici 1 je prikazano područje od  $10^\circ\text{N}$  do  $80^\circ\text{N}$  geografske širine i od  $-90^\circ$  do  $90^\circ$  geografske dužine. Na slici 1c preklopljene su kartografske mreže u uspravnoj ekvidistantnoj konusnoj projekciji s dvjema standardnim paralelama kada se standardne paralele nalaze na  $20^\circ\text{N}$  i  $70^\circ\text{N}$  geografske širine te na  $40^\circ\text{N}$  i  $50^\circ\text{N}$  geografske širine, a srednji meridijan preslikavanja u oba slučaja nalazi se na  $0^\circ$  geografske dužine. Između standardnih paralela linearno mjerilo uzduž paralela je manje od 1. Što se više odmičemo od standardnih paralela deformacije su sve veće,



Slika 1. Usporedba linearnog mjerila uzduž paralela i oblika geografske mreže u ekvidistantnoj konusnoj projekciji za područja srednjih geografskih širina ( $45^{\circ}\text{N}$ ) s dva simetrična i različita izbora standardnih paralela koje su istaknute na slikama. a) Raspon linearnih mjerila kada se standardne paralele nalaze na  $20^{\circ}\text{N}$  i  $70^{\circ}\text{N}$ . b) Raspon linearnih mjerila kada se standardne paralele nalaze na  $40^{\circ}\text{N}$  i  $50^{\circ}\text{N}$  geografske širine. c) Preklopljene geografske mreže kada se standardne paralele nalaze na  $20^{\circ}\text{N}$  i  $70^{\circ}\text{N}$  te na  $40^{\circ}\text{N}$  i  $50^{\circ}\text{N}$  geografske širine.

a najveće su na rubu preslikanog područja. Lako je uočljivo da su, zbog projekcije ekvidistantne uzduž meridijana, linearne deformacije uzduž meridijana jednake nuli, dok izbor standardnih paralela utječe na kut pod kojim se meridijani sijeku.

Ekvidistantna konusna projekcija dobar je izbor za područja na Zemljinoj sferi koja se nalaze na srednjim geografskim širinama. Slika 1 pokazuje da je utjecaj izbora standardnih paralela, koje su simetrične u odnosu na srednju širinu područja preslikavanja, na oblik geografske mreže i linearno mjerilo relativno malen. To je posebno izraženo kada prikazano područje na karti ne obuhvaća veliki raspon po geografskoj dužini. Ta činjenica upućuje na to da će i određivanje parametara takve projekcije, kao što su npr. standardne paralele, a na temelju određivanja koordinata točaka i duljina geografske mreže s karata, biti relativno nepouzdanost za relativno mala područja (Triplat Horvat i dr. 2015).

Deformacije se nastoje minimizirati uz različite uvjete.

## 2. Konusne projekcije

Uspravne konusne projekcije su takve kartografske projekcije kod kojih se meridijani preslikavaju kao dijelovi pravaca koji se sijeku pod kutovima proporcionalnim razlikama njihovih geografskih dužina, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem u presjeku meridijana. Opće jednadžbe uspravnih konusnih projekcija glase:

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \Theta \\y &= \rho_s - \rho \cos \Theta\end{aligned}\tag{1}$$

uz

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(\varphi) \\ \Theta &= n(\lambda - \lambda_0)\end{aligned}\tag{2}$$

gdje su

- $x, y$  – pravokutne koordinate u ravnini projekcije
- $\varphi, \lambda$  – geografska širina i dužina  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \lambda \in [-\pi, \pi]$
- $\rho = \rho(\varphi)$  – polumjer paralele u projekciji kojoj odgovara geografska širina  $\varphi$
- $\Theta$  – kut pod kojim se sijeku slike meridijana u projekciji
- $n$  – konstanta proporcionalnosti ( $0 < n < 1$ )
- $\lambda_0$  – geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja
- $\rho_s$  – konstanta kojom se definira odnos (pomak) polarnoga koordinatnog sustava  $\rho, \Theta$  s obzirom na pravokutni koordinatni sustav  $x, y$ . Obično se uzima kao polumjer paralele u projekciji kojoj odgovara najmanja (najjužnija) geografska širina.

Vrijednosti funkcije  $\rho = \rho(\varphi)$  na području koje se preslikava moraju biti pozitivne, a funkcija  $\rho = \rho(\varphi)$  monotono padajuća, tj. mora biti  $\frac{d\rho}{d\varphi} < 0$ . Funkcija  $\rho = \rho(\varphi)$  određuje se obično prema uvjetima preslikavanja, kao što su npr. uvjeti

konformnosti, ekvivalentnosti ili ekvidistantnosti. Ograničit ćemo se na projekcije Zemljine sfere polumjera  $R$ , a poopćenje na rotacijski elipsoid moglo bi biti predmetom budućih istraživanja.

Linearno mjerilo uzduž paralela u svim uspravnim konusnim projekcijama određeno je izrazom:

$$k = k(\varphi) = \frac{n\rho}{R \cos \varphi}. \quad (3)$$

Pri ispitivanju toka funkcije  $k = k(\varphi)$  pomoći će

$$\frac{dk}{d\varphi} = \frac{n}{R} \frac{\left( \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \varphi + \rho \sin \varphi \right)}{\cos^2 \varphi}. \quad (4)$$

Odatle slijedi da je

$$\frac{dk}{d\varphi} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0, \quad (5)$$

ako i samo ako je

$$\frac{d\rho}{d\varphi} \cos \varphi + \rho \sin \varphi \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0. \quad (6)$$

Linearno mjerilo uzduž meridijana u svim uspravnim konusnim projekcijama određeno je izrazom:

$$h = h(\varphi) = -\frac{d\rho}{R d\varphi}. \quad (7)$$

Ovdje imamo

$$\frac{dh}{d\varphi} = -\frac{d^2\rho}{R d\varphi^2}. \quad (8)$$

Mjerilo površina definirano je u svim uspravnim konusnim projekcijama izrazom:

$$p(\varphi) = h(\varphi)k(\varphi). \quad (9)$$

Da bi paralela određena geografskom širinom  $\varphi$  bila standardna paralela, treba biti

$$h(\varphi) = k(\varphi) = 1. \quad (10)$$

## 2.1. Konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana

Iz uvjeta ekvidistantnosti uzduž meridijana

$$h(\varphi) = -\frac{d\rho}{Rd\varphi} = 1 \quad (11)$$

slijedi

$$d\rho = -Rd\varphi. \quad (12)$$

Nakon integriranja

$$\rho(\varphi) = K - R\varphi = R(C - \varphi), \quad (13)$$

gdje smo označili

$$C = \frac{K}{R}. \quad (14)$$

Izraz (6) za konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana prelazi u

$$(C - \varphi) \tan \varphi \stackrel{>}{<} 1. \quad (15)$$

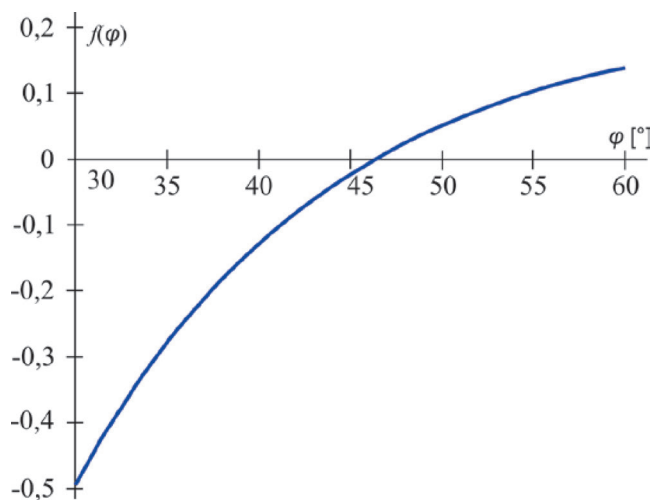
Za  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , (15) se može napisati u obliku

$$C \stackrel{>}{<} \varphi + \cot \varphi. \quad (16)$$

Jednadžba

$$C = \varphi + \cot \varphi \quad (17)$$

je nelinearna, koja ima jedinstveno rješenje  $\varphi = \varphi_0$ , a možemo ju riješiti npr. metodom raspolavljanja ili iteracijskom metodom. Zaključak da jednadžba (17) ima jedinstveno rješenje proizlazi iz teorema srednje vrijednosti koji kaže: ako je funkcija neprekidna i na krajevima zadanog intervala poprima vrijednosti sa suprotnim predznacima te ako je strogo monotona (slika 2) unutar zadanog intervala, tada funkcija ima jedno i samo jedno rješenje. U samo jednoj točki funkcija poprima vrijednost nule, koja se naziva nul-točkom funkcije, i ujedno je rješenje nelinearne jednadžbe. Funkcija je strogo monotona na zadanom intervalu kada prva derivacija te funkcije ima fiksni predznak na cijelom intervalu.



Slika 2. Prikaz funkcije  $f(\varphi) = \varphi + \cot \varphi$  za  $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ .

Dakle, uzevši u obzir (4), (5), (6), (15) i (16) možemo zaključiti da linearno mjerilo  $k = k(\varphi)$  ima minimum  $k_0 = k(\varphi_0)$ . Funkcija  $k = k(\varphi)$  ima oblik krivulje koja podsjeća na parabolu (slika 3).

Lako se može vidjeti da vrijedi

$$k_0 = k(\varphi_0) = \frac{nR(C - \varphi_0)}{R \cos \varphi_0} = \frac{n}{\sin \varphi_0}. \quad (18)$$

Da bi paralela određena geografskom širinom  $\varphi$  bila standardna paralela, treba još biti ispunjeno

$$k(\varphi) = \frac{n\rho}{R \cos \varphi} = 1, \quad (19)$$

odnosno

$$n\rho = R \cos \varphi. \quad (20)$$

Uzevši u obzir (13)

$$nC - n\varphi = \cos \varphi, \quad (21)$$

budući da imamo dvije konstante  $n$  i  $C$  možemo ih primjerice odrediti na temelju dviju zadanih geografskih širina  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  rješavanjem dviju jednačbi s dvjema nepoznanicama:

$$nC - n\varphi_1 = \cos \varphi_1$$

$$nC - n\varphi_2 = \cos \varphi_2. \quad (22)$$

Ako te dvije jednadžbe međusobno oduzmemo, dobit ćemo

$$n = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad (23)$$

Ako pak prvu jednadžbu pomnožimo s  $\varphi_2$ , a drugu s  $\varphi_1$  i onda ih oduzmemo, dobit ćemo

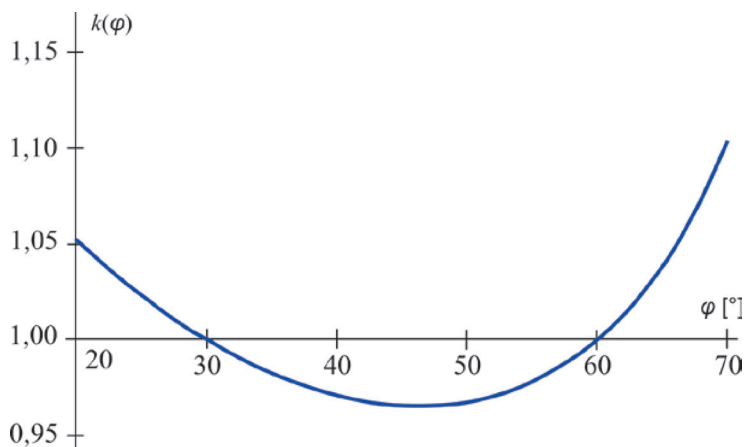
$$nC = \frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (24)$$

i zatim

$$C = \frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}, \quad (25)$$

odnosno

$$K = R \frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}. \quad (26)$$



Slika 3. Prikaz linearnog mjerila  $k = k(\varphi)$  uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana za područje od 20°N do 70°N geografske širine kada se standardne paralele nalaze na 30°N i 60°N geografske širine.



U posebnom slučaju ako je  $\varphi_1 = \varphi_2$ , onda  $n$  nije određen relacijom (23), koja u tom slučaju poprima neodređen oblik. Graničnim prijelazom kad  $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ , može se dobiti

$$n = \sin \varphi_1 \quad (27)$$

$$C = \varphi_1 + \cot \varphi_1 \quad (28)$$

$$K = R(\varphi_1 + \cot \varphi_1) . \quad (29)$$

S obzirom na to da jednadžba (17) ima jedinstveno rješenje, možemo zaključiti da je  $\varphi_1 = \varphi_0$ ,  $n = \sin \varphi_0$ ,  $k(\varphi_0) = 1$ , tj. da će jedinstvena standardna paralela biti ujedno ona paralela uzduž koje je linearno mjerilo najmanje.

Primjenom izraza (23) za  $n$ , (25) za  $C$  i (19) za  $k(\varphi)$  i odabirom dviju proizvoljnih standardnih paralela dobit će se krivulja koja podsjeća na parabolu (vidi sliku 3). Iz slike se može vidjeti stanovita nesimetričnost raspodjele linearnih deformacija na sjevernom i južnom području preslikavanja. Ta nesimetričnost može se primijetiti i u radovima autora koji su se do sada bavili problematikom proučavanja deformacija kartografskih projekcija (Hinks 1912, Young 1920, Adams 1927, Deetz i Adams 1934, Maling 1973, Snyder 1978, Skopeliti i Tsoulos 2013).

### 3. Ograničeno područje preslikavanja

Označimo s

$\varphi_S$  – geografsku širinu najjužnije paralele područja preslikavanja

$\varphi_N$  – geografsku širinu najsjevernije paralele područja preslikavanja.

U prethodnom je poglavlju pokazano kako se parametri projekcije mogu izračunati na temelju zadanih geografskih širina dviju standardnih paralela  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Zbog smisla i definicije standardnih paralela prirodno bi bilo uzeti da su  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  negdje u području preslikavanja, tj. da vrijedi

$$\varphi_S \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_N \quad (30)$$

premda ima i drukčijih izbora.

Tako je npr. za preglednu topografsku kartu Hrvatske koja je izrađena početkom 1990-ih u mjerilu 1:500 000 (listovi Republika Hrvatska Zagreb – Zadar M 1:500 000 i Republika Hrvatska Osijek – Split M 1:500 000 u izdanju Ministarstva obrane RH) uzeto  $\varphi_1 \leq \varphi_S \leq \varphi_N \leq \varphi_2$ . Standardne paralele nalaze se na 38°30' i 49° sjeverne geografske širine, a područje preslikano na kartama nalazi se od 42°13' do 46°30' sjeverne geografske širine. No to nije bio svjestan izbor standardnih paralela, već preuzeto stanje s karte većeg područja (bivše Jugoslavije).

Izbor  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  može se u skladu s (30) napraviti na beskonačno mnogo načina (vidi npr. Murdoch 1758, 1762, Euler 1777, Hinks 1912, Kavrayskiy 1959, Maling 1960, Snyder 1978, 1993).

Čini se prirodno zahtijevati da raspodjela deformacija u odnosu na sjeverni i južni dio područja koje se prikazuje bude simetrična, ako je i koliko je to moguće. Stoga ćemo postaviti prvi uvjet da linearno mjerilo na rubu područja (uzduž južne i sjeverne paralele) bude međusobno jednako:

$$k(\varphi_S) = k(\varphi_N) \quad (31)$$

što primjenom relacije (3) vodi na

$$\frac{n\rho(\varphi_S)}{R \cos \varphi_S} = \frac{n\rho(\varphi_N)}{R \cos \varphi_N}, \quad (32)$$

odakle slijedi najprije

$$\frac{\rho(\varphi_S)}{\cos \varphi_S} = \frac{\rho(\varphi_N)}{\cos \varphi_N}, \quad (33)$$

zatim uzevši u obzir (13)

$$\frac{C - \varphi_S}{\cos \varphi_S} = \frac{C - \varphi_N}{\cos \varphi_N} \quad (34)$$

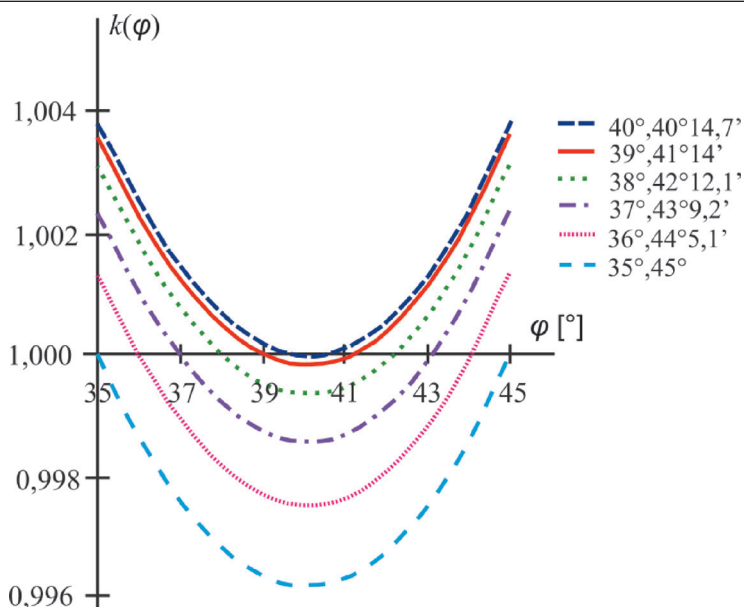
i odatle

$$C = \frac{\varphi_N \cos \varphi_S - \varphi_S \cos \varphi_N}{\cos \varphi_S - \cos \varphi_N}. \quad (35)$$

Vrijednost parametra  $C$  izračunat je primjenom izraza (35), nakon čega je određena vrijednost parametra  $\varphi_0$  primjenom izraza (17). Funkcija  $k = k(\varphi)$  ima oblik „parabole“ okrenute prema gore, vrijednosti koje su prema zadanom uvjetu (31) na rubu područja međusobno jednake (vidi sliku 4). Vrijednosti funkcije  $k$  izračunate su za područje od 35°N do 45°N geografske širine za različite standardne paralele.

### 3.1. Definiranje vrijednosti parametra $n$

Prisjetimo se na početku značenja pojmova linearno mjerilo i linearna deformacija. Odnos beskonačno male duljine u projekciji prema beskonačno maloj odgovarajućoj duljini na plohi elipsoida ili sfere kojima se aproksimira Zemlja naziva se linearnim mjerilom. Linearno mjerilo mijenja se na karti od točke do točke, a u danoj točki mijenja se promjenom azimuta. Ako je u nekoj točki u određenom pravcu deformacija jednaka nuli, linearno mjerilo jednako je jedinici (Frančula i Lapaine 2008).



Slika 4. Prikaz linearnog mjerila  $k = k(\varphi)$  uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana za područje od  $35^\circ\text{N}$  do  $45^\circ\text{N}$  geografske širine, s različitim standardnim paralelama i uz uvjet da je  $k(35^\circ) = k(45^\circ)$ .

Iz poznatih jednadžbi uspravne konusne projekcije (2) konstanta  $n$  može se odrediti pod različitim uvjetima, npr. posredno, birajući različite vrijednosti za  $\varphi_1$ . Na taj način mogu se dobiti različite raspodjele linearnih deformacija uzduž paralela: od slučaja kad su sve deformacije pozitivne (osim za  $\varphi_1 = \varphi_2$ , kad je uzduž te paralele deformacija nula), tj. sve paralele su u projekciji dulje od onih na sferi, pa do toga kad su sve deformacije na području preslikavanja negativne (osim za  $\varphi_1 = \varphi_S$  i  $\varphi_2 = \varphi_N$ , kad su uzduž tih paralela deformacije nula), tj. sve paralele su kraće od onih na sferi. Svim tim raspodjelama, prema uvjetu (31) koji smo zadali u prethodnom poglavlju, zajedničko je da su linearne deformacije uzduž najjužnije i najsjevnije paralele međusobno jednake.

U svakom slučaju linearno je mjerilo na rubnim paralelama najveće, a negdje u srednjem dijelu područja najmanje (vidi slike 3 i 4). Prirodno se nameće novi uvjet prema kojem bi linearne deformacije na rubnim paralelama bile po apsolutnoj vrijednosti jednake linearnim deformacijama u srednjem dijelu, odnosno ondje gdje je linearno mjerilo najmanje. Taj uvjet opisuju npr. Close i Clarke (1911), Hinks (1912), Mikhaylov (1912), Frischauf (1919), Kavrayskiy (1959).

Označimo li s  $\varphi_0$  geografsku širinu paralele uzduž koje je linearno mjerilo najmanje, tj.

$$k(\varphi_0) = \min, \quad (36)$$

tada za  $\varphi = \varphi_0$  (17) možemo napisati u obliku

$$C = \varphi_0 + \cot \varphi_0 \quad (37)$$

i zatim

$$k(\varphi_0) = \frac{n}{\sin \varphi_0} . \quad (38)$$

Navedeni uvjet prema kojem bi linearne deformacije na rubnim paralelama bile po apsolutnoj vrijednosti jednake linearnim deformacijama u srednjem dijelu glasi (Close i Clarke 1911, Hinks 1912, Mikhaylov 1912, Frischauf 1919, Borčić 1955, Kavrayskiy 1959):

$$k(\varphi_N) - 1 = 1 - k(\varphi_0) \text{ ili } k(\varphi_N) + k(\varphi_0) = 2 . \quad (39)$$

Jednadžba (37) je nelinearna jednadžba koja se rješava nekom od metoda za rješavanje takvih jednadžbi uz  $C$  određen relacijom (35). Budući da je

$$k(\varphi_N) = \frac{n(C - \varphi_N)}{\cos \varphi_N} \quad (40)$$

to se može iz (38) i (40) izvesti

$$k(\varphi_N) = k(\varphi_0) \sin \varphi_0 \frac{C - \varphi_N}{\cos \varphi_N} \quad (41)$$

i zatim uzevši u obzir (37)

$$k(\varphi_0) = 1 - \frac{\delta \sin \varphi_0 - \sin \delta \sin \varphi_M}{\delta \sin \varphi_0 + \sin \delta \sin \varphi_M} \quad (42)$$

$$k(\varphi_N) = k(\varphi_S) = 1 + \frac{\delta \sin \varphi_0 - \sin \delta \sin \varphi_M}{\delta \sin \varphi_0 + \sin \delta \sin \varphi_M} \quad (43)$$

$$n = k(\varphi_0) \sin \varphi_0 \quad (44)$$

uz oznake

$$\varphi_M = \frac{\varphi_N + \varphi_S}{2}, \quad \delta = \frac{\varphi_N - \varphi_S}{2},$$

$$0 < \varphi_M < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{4} - \left| \varphi_M - \frac{\pi}{4} \right| \quad (45)$$

Tablica 1. *Primjeri karata izrađenih u konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana.*

Br.	Naziv karte	Radijus sfere ( $R$ ) [km]	Mjerilo karte ( $M$ )	$\varphi_S$	$\varphi_N$
1.	Karta Europe	6370	1 : 4 500 000	30°	70°
2.	Karta SAD-a	6370	1 : 2 500 000	25°	49°
3.	Rigas Velestinlis – <i>Charta</i>	6370	1 : 600 000	25°	45°
4.	Karta Hrvatske	6370	1 : 500 000	41°	47°
5.	Maire i Bošković – <i>Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico</i>	6370	1 : 370 000	41°20'	45°

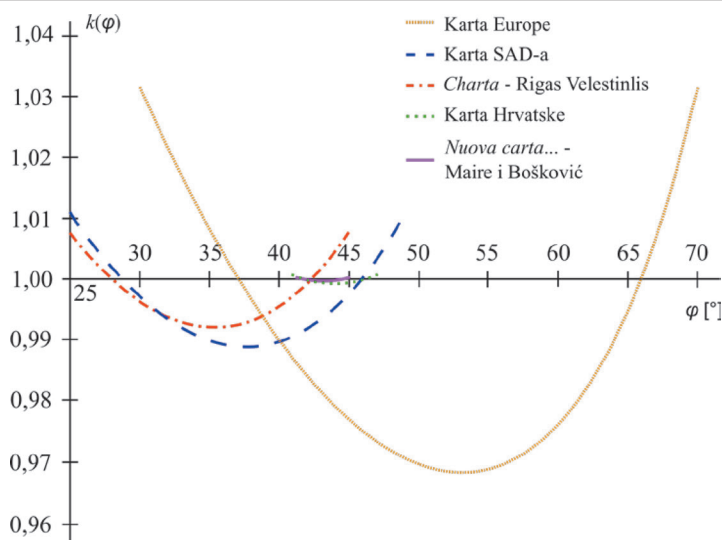
Primjenom izraza (35), (42), (43), (44) i (45) uz zadane uvjete (31) i (39) izračunate su vrijednosti linearnih mjerila  $k(\varphi)$  za područje Europe, SAD-a, Hrvatske te za karte *Charta* Rigasa Velestinlisa i *Nuova carta...* Mairea i Boškovića. Za navedena područja dobivene su vrijednosti prikazane u tablici 2.

Tablica 2. *Vrijednosti linearnih mjerila  $k(\varphi_0)$ ,  $k(\varphi_N) = k(\varphi_S)$  i konstante  $n$  za nekoliko karata izrađenih u konusnim projekcijama ekvidistantnima uzduž meridijana uz uvjete da je  $k(\varphi_S) = k(\varphi_N)$  i  $k(\varphi_N) - 1 = 1 - k(\varphi_0)$ .*

Br.	$\varphi_S$	$\varphi_N$	$\varphi_M$	$\delta$	$C$	$k(\varphi_0)$	$k(\varphi_N) = k(\varphi_S)$	$n$
1.	30°	70°	50°	20°	1,677404	0,955587	1,044413	0,783918
2.	25°	49°	37°	12°	1,953356	0,988919	1,011081	0,604045
3.	25°	45°	35°	10°	2,024482	0,992327	1,007673	0,575048
4.	41°	47°	44°	3°	1,802529	0,999313	1,000687	0,694818
5.	41°20'	45°	43°10'	1°50'	1,819171	0,999744	1,000256	0,684181

S obzirom na postavljene uvjete linearna mjerila su na rubovima područja međusobno jednaka te su linearne deformacije na rubnim paralelama jednake po apsolutnoj vrijednosti linearnim deformacijama na srednjem dijelu područja preslikavanja, što je lako uočljivo na slici 5.

Slika 5 prikazuje linearna mjerila uzduž paralele za kartu Europe, SAD-a, Hrvatske, *Charta* i *Nuova carta...* koje su izrađene u uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana uz uvjete  $k(\varphi_S) = k(\varphi_N)$  i  $k(\varphi_N) - 1 = 1 - k(\varphi_0)$ .



Slika 5. Prikaz linearnih mjerila  $k = k(\varphi)$  za uspravnu konusnu projekciju ekvidistantnu uzduž meridijana za područje Europe, SAD-a, Hrvatske te za karte Charta Rigas Velestinlis i Nuova carta... Maire i Boškovića, uz uvjete da je  $k(\varphi_S) = k(\varphi_N)$  i  $k(\varphi_N) - 1 = 1 - k(\varphi_0)$ .

#### 4. Razmatranje utjecaja širine i položaja područja preslikavanja u smjeru sjever-jug na raspon deformacija

Neka se geografska širina najjužnije  $\varphi_S$  i najsjevernije  $\varphi_N$  paralele područja preslikavanja nalaze u intervalu

$$0 \leq \varphi_S < \varphi_N \leq \frac{\pi}{2}.$$

Pretpostavimo da vrijedi (31) i da je u skladu s tim uvjetom određena vrijednost parametra  $C$  prema (35). U ovom poglavlju za vrijednost parametra  $n$  ne postavljamo nikakve posebne pretpostavke, tj.  $n$  je bilo koji realan broj iz intervala  $(0, 1)$ . Zanima nas što se može reći o utjecaju širine i položaja područja preslikavanja u smjeru sjever-jug na raspon deformacija. U tu svrhu istražimo funkciju

$$F(\varphi_S, \varphi_N) = k(\varphi_N) - k(\varphi_0) = k(\varphi_S) - k(\varphi_0), \quad (46)$$

gdje smo s  $\varphi_0$  označili geografsku širinu paralele uzduž koje je linearno mjerilo najmanje, tj. koja je određena nelinearnom jednačbom (37).

Uz oznake (45), izraz (37) može se zapisati

$$C = \frac{\varphi_N \cos \varphi_S - \varphi_S \cos \varphi_N}{\cos \varphi_S - \cos \varphi_N} = \varphi_M + \delta \cot \varphi_M \cot \delta \quad (47)$$

$$k(\varphi_N) = \frac{n(C - \varphi_N)}{\cos \varphi_N} = \frac{n\delta}{\sin \varphi_M \sin \delta} \quad (48)$$

te je stoga

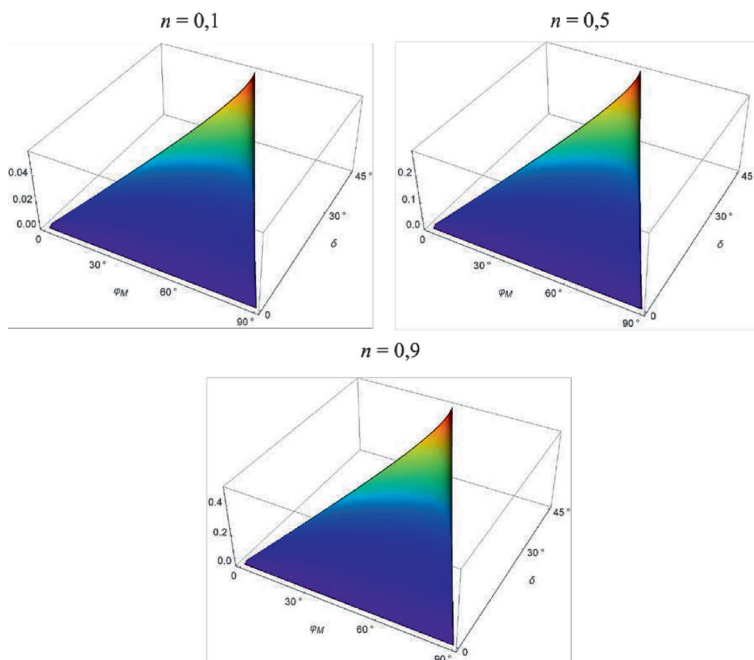
$$F(\varphi_M, \delta) = n \left( \frac{\delta}{\sin \varphi_M \sin \delta} - \frac{1}{\sin \varphi_0} \right), \quad (49)$$

gdje je  $\varphi_0$  rješenje nelinearne jednadžbe

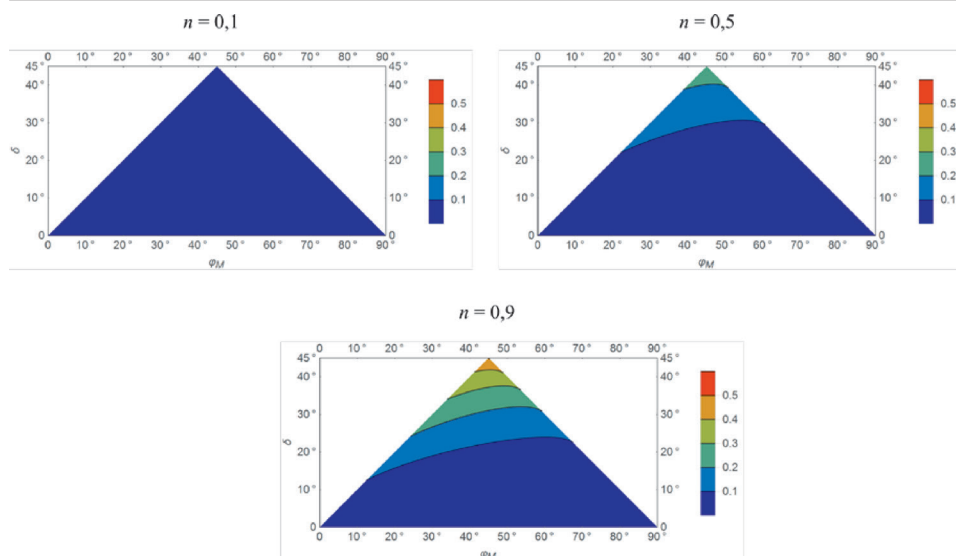
$$\varphi + \cot \varphi = C = \varphi_M + \delta \cot \varphi_M \cot \delta. \quad (50)$$

Naglasimo da formula (49) vrijedi za bilo koji  $n$ . Izbor  $n$  dobiven primjenom izraza (44) samo je jedan od mogućih.

Graf funkcije (49) prikazan je na slici 6, a odgovarajuće izolinije na slici 7. Izračunate i prikazane izolinije daju vrijednosti linearnih mjerila za različite vrijednosti parametara  $\varphi_M$  i  $\delta$  te za  $n = 0,1; 0,5; 0,9$ . Oblik izolinija daje dvodimenzionalnu sliku deformacija koje variraju od područja do područja za različite vrijednosti parametra  $n$ .



Slika 6. Graf funkcije  $F(\varphi_M, \delta) = n \left( \frac{\delta}{\sin \varphi_M \sin \delta} - \frac{1}{\sin \varphi_0} \right)$ , gdje je  $\varphi_0$  rješenje nelinearne jednadžbe  $\varphi + \cot \varphi = \varphi_M + \delta \cot \varphi_M \cot \delta$  za zadane  $\varphi_M$  i  $\delta$ ;  $n=0,1; 0,5; 0,9$ .



Slika 7. Izolinije funkcije  $F(\varphi_M, \delta) = n \left( \frac{\delta}{\sin \varphi_M \sin \delta} - \frac{1}{\sin \varphi_0} \right)$ , gdje je  $\varphi_0$  rješenje nelinearne jednačbe  $\varphi + \cot \varphi = \varphi_M + \delta \cot \varphi_M \cot \delta$  za zadane  $\varphi_M$  i  $\delta$ ,  $n=0,1; 0,5; 0,9$ .

#### 4.1. Određivanje intervala za parametar $n$ uz uvjet da konusna projekcija ekvidistantna uzduž meridijana ima jednako linearno mjerilo na najjužnijoj i najsjevernijoj paraleli te da ima barem jednu standardnu paralelu

Neka se geografska širina najjužnije  $\varphi_S$  i najsjevernije  $\varphi_N$  paralele područja preslikavanja nalaze u intervalu

$$0 \leq \varphi_S < \varphi_N \leq \frac{\pi}{2}.$$

Pretpostavimo da vrijedi (31) i da je u skladu s tim uvjetom određena vrijednost parametra  $C$  prema (35). Zanima nas što se može reći o utjecaju širine i položaja područja preslikavanja u smjeru sjever-jug na raspon deformacija. Treba istražiti funkciju (46)

$$F(\varphi_S, \varphi_N) = k(\varphi_N) - k(\varphi_0) = k(\varphi_S) - k(\varphi_0),$$

gdje smo s  $\varphi_0$  označili geografsku širinu paralele uzduž koje je linearno mjerilo najmanje, tj. koja je određena nelinearnom jednačbom (37). U prethodnom poglavlju nismo postavili nikakve uvjete na vrijednost parametra  $n$ , tj.  $n$  je bio bilo koji realan broj iz intervala  $(0, 1)$ .



Ako želimo da na promatranom području projekcija ima barem jednu standardnu paralelu, tada treba biti

$$k(\varphi_0) = \frac{n}{\sin \varphi_0} \leq 1, \quad (51)$$

odakle proizlazi

$$n \leq \sin \varphi_0. \quad (52)$$

Analognim razmatranjem, na rubu područja treba biti

$$k(\varphi_N) = \frac{n(C - \varphi_N)}{\cos \varphi_N} = \frac{n\delta}{\sin \varphi_M \sin \delta} \geq 1, \quad (53)$$

odakle proizlazi

$$n \geq \frac{\cos \varphi_N}{C - \varphi_N} = \frac{\sin \varphi_M \sin \delta}{\delta}. \quad (54)$$

Uz postavljene pretpostavke trebalo bi biti

$$\frac{\sin \varphi_M \sin \delta}{\delta} \leq n \leq \sin \varphi_0. \quad (55)$$

To pak znači da je

$$\begin{aligned} F(\varphi_M, \delta) &= n \left( \frac{\delta}{\sin \varphi_M \sin \delta} - \frac{1}{\sin \varphi_0} \right) \leq \sin \varphi_0 \left( \frac{\delta}{\sin \varphi_M \sin \delta} - \frac{1}{\sin \varphi_0} \right) = \\ &= \frac{\delta \sin \varphi_0}{\sin \varphi_M \sin \delta} - 1, \end{aligned} \quad (56)$$

tj. razlika  $F(\varphi_S, \varphi_N) = k(\varphi_N) - k(\varphi_0) = k(\varphi_S) - k(\varphi_0)$  je najveća kad je  $n = \sin \varphi_0$  i iznosi

$$\max F(\varphi_M, \delta) = \frac{\delta \sin \varphi_0}{\sin \varphi_M \sin \delta} - 1. \quad (57)$$

S druge strane

$$\begin{aligned} F(\varphi_M, \delta) &= n \left( \frac{\delta}{\sin \varphi_M \sin \delta} - \frac{1}{\sin \varphi_0} \right) \geq \frac{\sin \varphi_M \sin \delta}{\delta} \left( \frac{\delta}{\sin \varphi_M \sin \delta} - \frac{1}{\sin \varphi_0} \right) = \\ &= 1 - \frac{\sin \varphi_M \sin \delta}{\delta \sin \varphi_0}, \end{aligned} \quad (58)$$

tj. razlika  $F(\varphi_S, \varphi_N) = k(\varphi_N) - k(\varphi_0) = k(\varphi_S) - k(\varphi_0)$  je najmanja kad je  $n = \frac{\sin \varphi_M \sin \delta}{\delta}$  i iznosi

$$\min F(\varphi_M, \delta) = 1 - \frac{\sin \varphi_M \sin \delta}{\delta \sin \varphi_0}. \quad (59)$$

Dakle, možemo napisati

$$\min F(\varphi_M, \delta) = 1 - \frac{\sin \varphi_M \sin \delta}{\delta \sin \varphi_0} \leq F(\varphi_M, \delta) \leq \frac{\delta \sin \varphi_0}{\sin \varphi_M \sin \delta} - 1 = \max F(\varphi_M, \delta). \quad (60)$$

Vidimo još da vrijedi

$$\frac{k(\varphi_N)}{k(\varphi_0)} = \frac{\delta \sin \varphi_0}{\sin \varphi_M \sin \delta}. \quad (61)$$

Sad se (60) može napisati i ovako:

$$1 - \frac{k(\varphi_0)}{k(\varphi_N)} \leq k(\varphi_N) - k(\varphi_0) \leq \frac{k(\varphi_N)}{k(\varphi_0)} - 1. \quad (62)$$

Relacija (60) omogućava određivanje minimalne i maksimalne vrijednosti raspona linearnog mjerila uzduž paralele za konusne projekcije koje su ekvidistantne uzduž meridijana, za koje su linearna mjerila uzduž paralela na najjužnijoj i najsjevernijoj paraleli međusobno jednaka i koje imaju bar jednu standardnu paralelu. Konkretno vrijednosti za karte navedene u poglavlju 3.1. dane su u tablici 3.

Tablica 3. *Maksimalne i minimalne vrijednosti raspona F linearnog mjerila uzduž paralele za nekoliko karata izrađenih u konusnim projekcijama ekvidistantnima uzduž meridijana, za koje su linearna mjerila uzduž paralela na najjužnijoj i najsjevernijoj paraleli međusobno jednaka i koje imaju bar jednu standardnu paralelu.*

Br.	$\varphi_S$	$\varphi_N$	$\varphi_0$	min n	max n	min F	max F	max F – min F
1.	30°	70°	53°07,2'	0,750582	0,799894	0,061648	0,065698	0,004050
2.	25°	49°	37°38,9'	0,597425	0,610813	0,021919	0,022410	0,000491
3.	25°	45°	35°24,9'	0,570669	0,579495	0,015230	0,015466	0,000236
4.	41°	47°	44°03,05'	0,694341	0,695296	0,001374	0,001376	0,000002
5.	41°20'	45°	43°11,1'	0,684006	0,684356	0,000512	0,000512	0,000000

U tablici 3 vrijednost  $\varphi_0$  je dobivena rješavanjem nelinearne jednadžbe (50), minimalna i maksimalna vrijednost parametra  $n$  primjenom izraza (55), a minimalna i maksimalna vrijednosti funkcije  $F$  primjenom izraza (59) i (57), odnosno (60). Veličine  $\varphi_M$  i  $\delta$ , koje se upotrebljavaju za računanje parametra  $n$ , izračunate su primjenom izraza (45), vrijednosti kojega se mogu pronaći u tablici 2.

Dosadašnjim istraživanjem razvili smo postupak za ispitivanje vrste kartografske projekcije neke stare karte i određivanje parametara konusne kartografske projekcije ekvidistantne uzduž meridijana (Triplat Horvat 2014, Triplat Horvat i Lapaine 2014a, Triplat Horvat i Lapaine 2014b, Triplat Horvat i Lapaine 2015, Triplat Horvat i dr. 2015). Postupak je ispitan na primjeru karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, autori koje su Ch. Maire i J. R. Bošković. Istraživanjem smo došli do zaključka da određivanje parametara projekcije, osobito standardnih paralela, u kojoj je karta izrađena nije lak zadatak jer ne daje jedinstveno rješenje, osobito na kartama koje prikazuju malo područje Zemljine površine. Glavni je problem bio što nismo mogli sa sigurnošću utvrditi koje su uistinu standardne paralele na karti *Nuova carta*.... Prema jednoj od naših pretpostavki dobiveni su takvi rezultati jer je područje prikazano na karti malo pa nije jače izražen utjecaj deformacija koje uzrokuje odabir standardnih paralela. Stoga smo odlučili ispitati koliko veliko područje mora biti prikazano na karti da bi deformacije prouzrokovane neprikladnim odabirom standardnih paralela jače došle do izražaja.

Iz vrijednosti prikazanih u tablici 3 može se uočiti da veličina područja koje je prikazano na karti utječe na raspon deformacija, a za kartu *Nouva carta*... raspon deformacija iznosi 0. Povećanjem područja prikazanog na karti, raspon deformacija raste.

## 5. Zaključak

U radu smo proučavali raspon deformacija u smjeru sjever-jug za uspravnu konusnu projekciju koja je ekvidistantna uzduž meridijana. U prvom dijelu rada opisali smo postupak računanja parametara projekcije na temelju zadanih geografskih širina dviju standardnih paralela što se nalaze unutar područja preslikavanja i koji je uobičajen u poznatoj, do sada objavljenoj literaturi. Primijetili smo da takvim pristupom dolazi do nesimetričnosti u raspodjeli deformacija na rubnim područjima, onoga područja koje se preslikava.

Stoga smo u drugom dijelu rada postavili zahtjev da raspodjela deformacija u odnosu na sjeverni i južni dio područja koje se prikazuje bude simetrična. Postavili smo uvjet da su linearna mjerila na rubu područja (uzduž južne i sjeverne paralele) međusobno jednaka.

U zadnjem dijelu rada razmatrali smo utjecaje širine i položaja područja preslikavanja u smjeru sjever-jug, u konusnim projekcijama ekvidistantnima uzduž meridijana, na raspon deformacija istražujući funkciju  $F$ , odnosno raspon linearnog mjerila uzduž paralele. U prvom dijelu istraživanja nismo postavili nikakve uvjete za određivanje vrijednosti nepoznate konstante proporcionalnosti (parametar  $n$ ) već smo odabrali da je on bilo koji realni broj iz intervala (0, 1). U drugom dijelu istraživanja uz uvjete da su linearna mjerila uzduž paralela na najjužnijoj i najsjevernijoj paraleli međusobno jednaka i koje imaju barem jednu standardnu

paralelu odredili smo interval unutar kojeg se vrijednost parametra  $n$  nalazi. Da bismo odredili vrijednost parametra  $n$  iz tog intervala postavili smo dodatni uvjet prema kojem bi linearne deformacije na rubnim paralelama bile po apsolutnoj vrijednosti jednake linearnim deformacijama u srednjem dijelu. Naravno, to je samo jedan od mogućih uvjeta koji se može postaviti. Time smo odredili i relaciju koja omogućuje određivanje minimalne i maksimalne vrijednosti raspona linearnog mjerila uzduž paralele u konusnim projekcijama koje su ekvidistantne uzduž meridijana.

Postupak smo ispitali na pet karata: Europe, SAD-a, Hrvatske, *Charta Rigasa* Velestinlisa i *Nuova carta...* Maireia i Boškovića koje su izrađene u ekvidistantnoj konusnoj projekciji. Karte prikazuju područja sjevernih geografskih širina različitih raspona u smjeru sjever-jug. Iz izračunatih vrijednosti raspona linearnih mjerila uzduž paralele pokazali smo da je raspon deformacija u smjeru sjever-jug veći što je preslikano područje veće, dok se kod malih raspona geografskih širina utjecaj deformacije čak može i zanemariti.

## Literatura

- Adams, S. (1927): Tables for Albers Projection U.S. Coast and Geodetic Survey Special Publication, No. 130. D.C. Government Printing Office, Washington.
- Borčić, B. (1955): Matematička kartografija, Kartografske projekcije, Tehnička knjiga, Zagreb.
- Close, C. F., Clarke, A. R. (1911): Map Projections Encyclopaedia Britannica, 11(17), 653–663.
- Deetz, C. H., Adams, O. S. (1934): Elements of Map Projection with Applications to Map and Chart Construction U.S. Coast and Geodetic Survey, Special Publication 68, 4, D.C. Government Printing Office, Washington.
- Euler, L. (1777): De projectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii russici usita. Translated in German in: Drei Abhandlungen über Kartenprojection, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, 1898, 93, 3–37, Wilhelm Engelmann, Leipzig. Translated in Russian: O geografičeskoj proekcii Delilja, primenenoj na general'noj karte Rossijskoj Imperii, Trudy Peterburgskoj akademii nauk za 1777 g., 1959, 1, 143–153. In L. Ejler: Izbrannye kartografičeskie stat'i, Tri stat'i po matematičeskoj kartografii, Izdatel'stvo geodezičeskoj literatury, Moscow.
- Frančula, N., Lapaine, M. (2008): Geodetsko-geoinformatički rječnik, Državna geodetska uprava, Zagreb.
- Frischauf, J. (1919): Beiträge zur Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids Teubner, Leipzig, 69–71.
- Hinks, A. R. (1912): Map Projections, The University Press, Cambridge, 82–88.
- Kavrayskiy, V. V. (1959): Izbrannye trudy, Tom II: Matematičeskaja kartografija, Vyp. 2. Konicheskie i cilindričeskie proekcii, ih primenenie Izdanie Upravljenija nachal'nika Hidro-grafičeskoj služby, VMF.
- Maling, D. H. (1960): A Review of Some Russian Map Projections Empire, Survey Review XV, 115 (203–215), 116 (255–266), 117 (294–303).
- Maling, D. H. (1973): Coordinate System and Map Projections, George Philip and Son Limited, London.

- Mikheylov, A. A. (1912): O proyektseyakh na sekushchem konuse, sokhranyayushchikh razmery po meridianam Otchet Moskov, O-va Lyubiteley Astronomii za 1912–1913 gg. M, 46–56.
- Murdoch, P. (1758): On the best Geographical Maps, u Davis, L. i Reymers, C. (ur.) Philosophical Transactions (of the Royal Society), 50(2), London, 553–562. Followed by A short Dissertation on Maps and Charts: In a Letter to the Rev. Thomas Birch, D.D. and Secret. R. S. By Mr. Wm. Mountaine, F.R.S., 563–568. Followed by Addenda to Mr. Murdoch's Paper, No. LXXIII, 568.
- Murdoch, P. (1762): Of the best Form of a Geographical Map, u Busching, A. F. (ur.) A New System of Geography in six volumes, Volume the First, printed for Millar A. in the Strand, XLVI–XLVIII, London.
- Skopeliti, A., Tsoulos, L. (2013): Choosing a Suitable Projection for Navigation, Arctic Marine Geodesy, 36(2), 234–259.
- Snyder, J. P. (1978): Equidistant Conic Map Projections, Annals of the Association of American Geographers, 68(3), 373–383.
- Snyder, J. P. (1993): Flattening the Earth, The University of Chicago Press Chicago, London.
- Triplat Horvat, M. (2014): Kartografska analiza karata Papinske Države J. R. Boškovića i Ch. Mairea, doktorski rad, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Triplat Horvat, M., Lapaine, M. (2014a): Determining the Map Projection of the Old Maps, Proceedings of the 5th International Conference on Cartography and GIS, Riviera, Bulgaria, 119–129.
- Triplat Horvat, M., Lapaine, M. (2014b): Standard Parallels of Equidistant Conic Projections on Old Maps, Proceedings of the 9th International Workshop Digital Approaches to Cartographic Heritage, Budapest, Hungary, 102–116.
- Triplat Horvat, M., Lapaine, M. (2015): Determination of Definitive Standard Parallels of Normal Aspect Conic Projections Equidistant along Meridians on an Old Map, International Journal for Cartography, 1(1), 32–44.
- Triplat Horvat, M., Lapaine, M., Tutić, D. (2015): Problems in Standard Parallels Reconstruction, Proceedings of the 10th Jubilee Conference + Workshop Digital Approaches to Cartographic Heritage, Corfu, Greece.
- Young, A. E. (1920): Some Investigations in the Theory of Map Projections, Royal Geographical Society Kensington Gore, London.

## Range of Distortions in the Normal Aspect Equidistant Conic Projection

*ABSTRACT.* In the paper, we study the range of distortions in a north-south direction for the normal aspect conic projection equidistant along meridians. The first part of the paper describes the procedure of calculating the projection parameters based on the given latitudes of two standard parallels within a range of mapped area. This procedure is common in the well-known literature published so far. The second part of the paper studies the distribution of distortion, on condition that the distortions on the north and south parts of the area shown are symmetrical. We set the condition that the linear scale in the marginal area (along the northern and southern parallels) is equal. The last part of the paper studies the influence of the width and position of the mapped area in a north-south direction, for conic projections equidistant along the meridians, in a range of distortions determining the value of an unknown proportionality constant (parameter  $n$ ). In the first part of the research, the proportionality constant is a real number from the interval  $(0, 1)$ . In the second part of the research, in order to determine the value of the parameter  $n$  from the interval, we set an additional condition, according to which linear distortions on marginal parallels would in terms of absolute values be equal to linear distortions in the central area. Thus, we determined the relation that allows the determination of the minimum and maximum values of the range of the linear scale along a parallel for conic projections which are equidistant along the meridians.

*Keywords:* map projections, equidistant conic projection, range of distortion.

*Primljeno / Received:* 2016-02-05

*Prihvaćeno / Accepted:* 2016-05-11